

îiϕ Ez^ ^> d
'Œ ótôš u D %•

ŽW Œ({Œu v > À o • Œ]‰š}}vld ŒP š }(D •μŒ u v š
/š u
W}•]š}}v

îîEz^ ^> d
'OE • ótô /š u D %• ~ }vš]vµ •

ŽW OE({OEu v > À o • OE]‰š}}vld CEP š }(D •µOE u vš

/š u W}•]š]]v	d •š ^ ••]yš u dÇ Z •‰}v•	‰W}}]vš •D} o]šÇ W> ld}DŽ	• OE]‰š}}v
------------------	------------------------------	---------------------------	------------

íî ^‰ I]vP }v•š OEµ š î ^‰ I]vPW> XîX^XóvšXv š }•l (µ •š}}v•U ‰ OE ‰ ZOE •]v({OEu š }
Z •‰}v• dOE v•]š]†š]vPWš µ•••]u‰o v l}OE Æ‰ v
v }všOE] µš š } }vÀ OE• š}}vX
íí ^‰ I]vP }v•š OEµ š î ^‰ I]vPW> XđX^XšµXí Æ • vš}v ••OE] }OE }vÀ Ç OE o À vš
š]o• v v OECE š •š}OEÇ }OE ‰ OE} ••]v • <
}uu v]vPšµ v š µ•••]u‰o U Æ‰ v U v
}u‰o Æ • vš v • v (š)µ]v ØÇPµ P
íî ^‰ I]vP }v•š OEµ š î ^‰ I]vPW> XñX^Xš‰XU]vš OE‰OE š (š • v À oµ š À] v U
‰}}]vš•]v }Z OE vš u vv OEU v ‰ OE}À] v
}OE o]u •µ‰‰}OEš Ç OE •}v•X
u CEP]†µW vš vU Á]šZ u} OE š •µ‰‰}OEš U
] vš]({Ç •}u ÁµĐ OE • vU }` ‰ ‰
í í Dµoš]‰o r_í >]•š v]vPW> XîX>XóróXî (v v P5P`ŷØv`

îîϑEz^ ^> d
'Œ • ótô /š u D %• ~ }vš]vμ •

ŽW Œ({Œu v > À o • Œ]‰š}}vld ŒP š }(D •μŒ u v š

/š u W}•]š]]v	d •š ^ ••]yš u dÇ	%W}}]vš•D} o]šÇ W> ld}DŽ	• Œ]‰š}}v
------------------	-------------------	--------------------------	-----------

đ í Dμoš]‰o rí >]•š v]vP
Z}]

îîϑEz^ ^> d
 'Œ • ótô /š u D %• ~ }vš]vμ •

ŽW Œ({Œu v > À o • Œ]‰š}}vld ŒP š }(D •μŒ u vš

/š u W}•]š]]v	d • š ^ •]yš u dÇ ‰W}}]vš •D} o]šÇ W> ld}DŽ	• Œ]‰š}}v
------------------	--	-----------

õ	í	Dμoš]‰o r _í Z}}	Z]vP W> XíXZXóřôXí	vš Œ]vš]vμ vš u ÇU Á]šZ •μ •š vš] o •μ‰‰}Œš] vš](Ç (Á Á}Œ •U •Z}Œš ‰ZŒ • •U }Œ ‰‰] •vš v • š]P vš o]u‰}Œš vš]v]Á] μ o •U u]v] •U •μ‰‰}Œš]vP] •U }v ‰š •U Á] v U uμoš]‰o ‰}}]vš •}(Á] ÁU o]š Œ ŒÇ Á] •U u •• P }Œ š]Ž u PŒ ro À o š ÆšX u ŒP]vš]vμ vš vU Á]šZ u } Œ š •μ‰‰}Œš U] vš](Ç •}u Á}Œ •U ‰ZŒ • •U }Œ (Á •]u‰‰
îî	í	Dμoš]‰o r _í Z}}	Z]vP W> XîXZXóřôXí	•vš v • š]P vš o]u‰}Œš vš]v]Á] μ o •U u]v] •U •μ‰‰}Œš]vP] •U }v ‰š •U Á] v U uμoš]‰o ‰}}]vš •}(Á] ÁU o]š Œ ŒÇ Á] •U u •• P }Œ š]Ž u PŒ ro À o š ÆšX
íí	í	Dμoš]‰o r _í Z}}	Z]vP W> XîXZXóřôXí	dŒ v•]š]]vš]vμ P Wš vU Á]šZ o]u]š •μ‰‰}Œš U] vš](Ç u}•š ‰ZŒ • •U •]u‰‰ • vš v •U }Œ] Œš vš v •U }Œ l Ç š]o•U • (μ v U }v v š]]v•U Œ o š]]v•Z] }v oμ•]]v•U v l}Œ]vš ŒŒš]]vŒ À o š ÆšX
îî	í	Dμoš]‰o r _í Z}}	Z]vP W> XôXZXóřôXí	Œ‰ v]vš]vμ vš v] vš](Ç u}•š •]u‰‰ }Œ •}u Œ‰ v }Œ }u‰‰ Œ š}P šš Ž Œ šZ š Á] v U Á vš •U }Œ]vŒŒ š]]vŒ Á]‰ š Æš •X
îî	í	Dμoš]‰o r _í Z}}	Z]vP W> XôXZXóřôXí	Œ‰ v]vš]vμ vš v }]P vš]](]Ç vš o u vš •U }v v š]]v•U Œ o š]]v•Z]‰•U š}‰] •U v l}Œ š šZ š Œ •š Ç]šZ Œ š •šŒ]P šš]v]Œ‰ }Œ •}u Œ‰ v }Œ }u‰‰ Œ •vš v •šZ š Á š}P šZ Œ š} š Œu]v o u vš •U }v v š]]v•U š}‰]]v PŒ ro À o š Æš •X

îîϑEz^ ^> d
'Œ • ótô /š u D %• ~ }vš]vμ •

ŽW Œ({Œu v > À o • Œ]‰š}}vld ŒP š }(D •μŒ u v š

/š u W}•]š]]v	d • š ^ • •]yš u dÇ	%W}}]vš • D} o]š Ç W > ld}DŽ	• Œ]‰š}}v
------------------	----------------------	-------------------------------	-----------

}uu v]vP μ v š . v] . v š](Ç À

íð í Dμoš]‰o r í Z]vP W > XñXZXórôXđ
Z}}

îîϕEz^ ^> d
 'Œ • ótô /š u D %• ~ }vš]vμ •

ŽW Œ({Œu v > À o • Œ]‰š}}vld ŒP š }(D •μŒ u vš

/š u W}•]š]]v	d • š ^ • yš u dÇ	%W}}vš • D} o]š Ç W> ld}DŽ	• Œ]‰š}}v
------------------	----------------------	----------------------------	-----------

dŒ v•]š]]vš]μPWš vU Á]šZ o]u]š •μ‰‰}ŒšU
] vš](Ç u}•š %ZŒ • •U •]u‰o • vš v •U }Œ
 íõ î Dμoš]‰o r_i >]•š v]vRV> XîX>XóvšXî
 AE‰v }Œ }u‰o AE •]Rvš α }ŒšZvšÀ Ç
 | Ç š]o•U • <μ v U }vv š}}v•U Œ o š}}v•Z]
 }v oμ•}}v•U v l}Œ]všPŒ š}pvÀ o
 •‰}l v]• }μŒ• X
 dŒ v•]š]]vš]μPWš v š}Œsu}ŒšZ
 îî î Dμoš]‰o r_i >]•š v]vRV> XîX>XóvšXî
 o]š Œ o v (Á)(šZ (]PμŒ š]À }Œ }vv}š
 u v]vP• }(d] Œ í v • d] Œ Z ÁŒŒu‰ š
]v PŒ ro À o •‰}l v]• }μŒ• X
 u ŒP]vš]μPW vš vU Á]šZ u} Œ š •μ‰‰}ŒšU
] vš](Ç •}u Á}Œ •U ‰ZŒ • •U }Œ (Á •]u‰o
 îí î Dμoš]‰o r_i >]•š v]vRV> XîX>XóvšXî
 • š]Pvš o }Œ }vÀ Ç l Ç š]o•U
 • <μ v U }vv š}}v•U Œ o š}}v•Z]‰•U }v 5Pv>

îîϑEz^ ^> d
 'Œ • ótô /š u D %• ~ }vš]vμ •

ŽW Œ({Œu v > À o • Œ]‰š}}vld ŒP š }(D •μŒ u vš

/š u W}•]š]]v	d • š ^ • •]yš u dÇ‰W}}vš•D} o]šÇ W> ld}DŽ	• Œ]‰š}}v
î ð	î	Dμoš]‰o r í Z}}
î ñ	î	Dμoš]‰o r í Z}}
î ò	î	Dμoš]‰o r í Z}}
î ó	î	Dμoš]‰o r í Z}}
î ô	î	Dμoš]‰o r í Z}}
î õ	î	Dμoš]‰o r í Z}}

• $\hat{\rho} \in \mathbb{R}^{d \times d}$
'OE • $\hat{\rho} / \text{tr}(\hat{\rho})$ • $\sim \text{vec}(\hat{\rho})$ •

îîϑ Ez^ ^> d
 'Œ óô/š u D %• ~ }vš]vμ •

ŽW Œ({Œu v > À o • Œ]‰š}}vld ŒP š }(D •μŒ u vš

/š u W}•]š]]v	d • š ^ • •]yš u dÇ‰W}}vš • D} o]šÇ W> ld}DŽ	Dμoš]‰o r _i Z}}	‰o r _i	>]•š v]vŒV> XîX>XóvšXî • šZ š •]Pv o }Œ }vÀ Ç l Ç š]o•U	• Œ]‰š}}v
đí	ï	Dμoš]‰o r _i Z}}	‰o r _i	>]•š v]vŒV> XîX>XóvšXî • šZ š •]Pv o }Œ }vÀ Ç l Ç š]o•U	u ŒP]vš vU Á]šZ u } Œ š •μ‰‰}Œš U] vš](Ç •]u Á}Œ •U %ZŒE • •U }ŒE (Á •]u‰ • <μ v U }v v š}}v•U ŒE o š}}v•Z]‰•U }v o μ• v l}ŒE]vš ŒE]vš]ŒE ro À o •‰}l v]• }μŒE • X
đî	ï	Dμoš]‰o r _i Z}}	‰o r _i	>]•š v]vŒV> XñX>XóvšXî • šZ š •]Pv o }Œ }vÀ Ç l Ç š]o•U	}uu v]vPμ vš v] vš](Ç Á Æ‰ v U }ŒE }u‰o Æ]Pwšv • šZ š]u‰}ŒE š vš]v]Á] μ o•U u]v] •U •μ‰‰}ŒE š] }v %š•U Á] v U Á vš•U u μoš]‰o %}}]vš• o]š ŒE ŒEÇ Á] •U v l}ŒE šZ]vu •• P }ŒE šZ u PŒE ro À o •‰}l v]• }μŒE • X
đï	ï	Dμoš]‰o r _i Z}}	‰o r _i	Z]vP W> XîXZ>XóvšXî • šZ š •]Pv o }Œ }vÀ Ç l Ç š]o•U	vš ŒE]vš vU Á]šZ • μ • š vš] o •μ‰‰}ŒE š] vš](Ç (Á Á }ŒE •U •Z}ŒE š %ZŒE • •U }ŒE %ŒE • vš v • š]P vš o]u‰}ŒE š vš]v]Á] μ o•U u]v] •U •μ‰‰}ŒE š]vP] •U }v %š•U Á] v U u μoš]‰o %}}]vš• }(Á] ÁU o]š ŒE ŒEÇ Á] •U u •• P }ŒE š]Z u PŒE ro À o š ÆšX
đđ	ï	Dμoš]‰o r _i Z}}	‰o r _i	Z]vP W> XîXZ>XóvšXî • šZ š •]Pv o }Œ }vÀ Ç l Ç š]o•U	u ŒP]vš vU Á]šZ u } Œ š •μ‰‰}Œš U] vš](Ç •]u Á}Œ •U %ZŒE • •U }ŒE (Á •]u‰ • <μ v U }v v š}}v•U ŒE o š}}v•Z]‰•U }v o μ• v l}ŒE]vš ŒE]vš]ŒE ro À o š ÆšX
đň	ï	Dμoš]‰o r _i Z}}	‰o r _i	Z]vP W> XîXZ>XóvšXî • šZ š •]Pv o }Œ }vÀ Ç l Ç š]o•U	u ŒP]vš vU Á]šZ u } Œ š •μ‰‰}Œš U] vš](Ç •]u Á}Œ •U %ZŒE • •U }ŒE (Á •]u‰ • <μ v U }v v š}}v•U ŒE o š}}v•Z]‰•U }v o μ• v l}ŒE]vš ŒE]vš]ŒE ro À o š ÆšX

îîEz^ ^> d
 'OE • ótô /š u D %• ~ }vš]vµ •

ŽW OE({OEu v > À o • OE]‰š}}vld CEP š }(D •µOE u vš

/š u W}•]š]]v	d •š ^ ••]yě u dÇ‰W}}vš•D} o]šÇ W> ld}DŽ	Dµoš]‰o r _i Z}}	‰W}}vš•D} o]šÇ W> ld}DŽ	Dµoš]‰o r _i Z}}	Dµoš]‰o r _i Z}}	Dµoš]‰o r _i Z}}
ðò	i	Dµoš]‰o r _i Z}}	Z]vP W> XöXZ	Z]vP W> XöXZ	Z]vP W> XöXZ	Æ‰ v]všP W vš v] vš](Ç u}•š •]u‰o }OE •]U Æ‰ v }OE }u‰o Æ š}R ššZ OE šZ š Á] v U Á vš•U }OE]vCE š}}vU š Æš•X
ðó	i	Dµoš]‰o r _i Z}}	Z]vP W> XöXZ	Z]vP W> XöXZ	Z]vP W> XöXZ	Æ‰ v]všP W vš v š}CEsu]Z o]š OE o v •]u } (šZ (]PµCE š]À }OE }vv}š š]À u v } (d] OE í v d] OE í Á}OE •]w }Z]OE]r]u‰o š o À o š ÆšX
ðô	i	Dµoš]‰o r _i Z}}	Z]vP W> XîXZ	Z]vP W> XîXZ	Z]vP W> XîXZ	u CEP]všP W vš v U Á]šZ u} OE š •µ‰‰}CE š U] vš](Ç •]u Á}OE •U ‰ZCE ••U }OE (Á •]u‰o • vš v • š]Z vš o]u‰o}CE š vš]v]À] µ o•U u]v] •U •µ‰‰}CE š]vP] •U }v ‰š•U Á] v U uµoš]‰o ‰}}]vš•} (À] ÁU o]š CE CEÇ À] •U u ••P }OE š]Z u PCE ro À o š ÆšX
ðõ	i	Dµoš]‰o r _i Z}}	Z]vP W> XîXZ	Z]vP W> XîXZ	Z]vP W> XîXZ	u CEP]všP W vš v šZCEw]]vš OE o u v]vP]u‰o]š PCE ro À o š ÆšX]u‰o]š PCE ro À o š ÆšX
ñi	i	Dµoš]‰o r _i Z}}	Z]vP W> XîXZ	Z]vP W> XîXZ	Z]vP W> XîXZ	vš CE]všP W vš u ÇU Á]šZ •µ •š vš] o •µ‰‰}CE š] vš](Ç (Á Á}OE •U •Z}CE š ‰ZCE ••U }OE ‰O • <µ v U }vv š}}v•U OE o š}}v•Z]‰•U }v oµ• v l}OE]vš OE]vš}}RCE ro À o š ÆšX

• $\hat{\rho} = \frac{1}{2}(\rho + \rho^\dagger)$
• $\hat{\sigma} = \frac{1}{2}(\rho - \rho^\dagger)$
• $\hat{\rho} = \frac{1}{2}(\rho + \rho^\dagger)$
• $\hat{\sigma} = \frac{1}{2}(\rho - \rho^\dagger)$